Örnek. Aşağıdaki D.P. problemini Simpleks yöntemle çözüp yorumlayalım.

Bir marangoz işletmesinde masa ve sandalye üretmektedir. Bir adet masa yapımı için 30 metre tahtaya ve 5 saat işgücüne gerek vardır. Bir sandalye yapımı için de 20 metre tahta ile 10 saat işgücü kullanılmaktadır. İşletmenin elinde 300 metre tahta ile 110 saat işgücü vardır. Bir masanın ve bir sandalyenin satışından elde edilecek karlar ise sırasıyla 6 pb ve 8 pb dir. Marangozun amacı satış karını maksimum kılmaktır. Buna göre marangoz ne kadar masa ve sandalye üretmelidir?

Karar değişkenleri:

x_1 : Üretilmesi gereken masa miktarı

x_2 : Üretilmesi gereken sandalye miktarı

olup model aşağıdaki gibi kurulur.

$Max\ Z$: $6x_1 + 8x_2$

$Kısıtlar$: $30x_1 + 20x_2 \leq 300$ $(Tahta)$

$5\,x_1 + 10x_2 \leq 110$ (İş$gü$c$ü$)

$x_1, x_2 \geq 0$

Verilen problemin standart biçimi aşağıdaki gibi olur:

$Max\ Z$: : $6x_1 + 8x_2 + 0s_1 + 0s_2$

$Kısıtlar$: $30x_1 + 20x_2 + s_1 = 300$

$5\,x_1 + 10x_2 + s_2 = 110$

$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

Başlangıç temel çözümü bulunur.

c_j			6	8	0	0	ORAN
	TD	**TDD**	x_1	x_2	s_1	s_2	
0	s_1	300	30	20	1	0	300/20=15
0	s_2	110	5	**10**	0	1	**110/10=11**
	z_j	0	0	0	0	0	
	$c_j - z_j$	--	6	**8**	0	0	

$c_j - z_j \leq 0$ değil.

Anahtar satır ve anahtar sütun belirlenerek yeni tablo oluşturulur ve çözüme bakılır.

c_j			6	8	0	0	ORAN
	TD	**TDD**	x_1	x_2	s_1	s_2	
0	s_1	80	**20**	0	1	-2	**80/20=4**
8	x_2	11	1/2	1	0	1/10	11/(1/2)=22
	z_j	88	4	8	0	8/10	
	$c_j - z_j$	--	**2**	0	0	-8/10	

$c_j - z_j \leq 0$ değil.

Anahtar satır ve anahtar sütun belirlenerek yeni tablo oluşturulur ve çözüme bakılır.

c_j			6	8	0	0
	TD	**TDD**	x_1	x_2	s_1	s_2
6	x_1	4	1	0	1/20	-1/10
8	x_2	9	0	1	-1/40	3/20
	z_j	96	6	8	1/10	3/5
	$c_j - z_j$	--	0	0	-1/10	-3/5

$c_j - z_j \leq 0$ dır. O halde optimal çözüm bulunmuştur.

Optimal çözüm: $x_1 = 4$, $x_2 = 9$, $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, Max Z=96 olarak elde edilir.

Yorum: Soruda verilen bilgilere göre, 4 tane masa ve 9 tane sandalye üretilmelidir. Bunların satışından elde edilecek maksimum kar 96 pb. dir.

$S_1 = 0$ ve $S_2 = 0$ olması, tahta ve işgücünün tamamı kullanılmış anlamına gelir. Yani elimizde kullanılabilecek tahta ve işgücü kalmamıştır.

z_j **satırındaki (gözden çıkarma satırı) değerler,** bir değişiklik yapıldığında birim başına kardaki kaybı gösterir.

$c_j - z_j$ **satırındaki değerler,** ilişkili bulunduğu değişkenden "bir birim daha üretildiğinde" sağlayacağı kazanç artışını (Minimizasyon problemlerinde maliyet azalışını) gösterir.

Başlangıç çözümündeki tabloda bulunan,

6 rakamının anlamı : bir tane masa yapılıp satılırsa marangozun karının 6 pb artacağını ifade eder.

Şimdi, başlangıç çözümünden sonraki tabloyu yorumlarsak;

c_j			6	8	0	0
	TD	**TDD**	x_1	x_2	s_1	s_2
0	s_1	80	20	0	1	-2
8	x_2	11	1/2	1	0	1/10
	z_j	88	4	8	0	8/10
	$c_j - z_j$	--	2	0	0	-8/10

20 : Bir masa yapmak için 20 metre kullanılmayan tahtadan vazgeçmemiz gerektiğini belirtir.

(Bir masa yapmak için 20 metre tahta kullanmamız gerekiyor)

1/2 : Bir masa yapmak için 1/2 sandalye yapımından vazgeçmemiz gerektiğini belirtir.

-2 : Bir saat daha fazla işgücü kullanmak(kullanılmayan işgücünü bir saat artırmak) için -2 metre kullanılmayan tahtadan vazgeçmemiz gerekir. (Bir saat işgücü kullanmak için -2 metre kullanmalıyız)

Yani 2 metre daha az tahta kullanmalıyız.

1/10 : Bir saat daha fazla işgücü kullanmak için 1/10 sandalye üretiminden vazgeçmeliyiz.

z_j satırındaki 4 : Bir tane masa yapmak için 1/2 sandalye yapımından vazgeçmenin, karda 4 pb kayba neden olacağını belirtir.

z_j satırındaki 8/10 : Bir saat daha fazla işgücü kullanmak için 1/10 sandalye üretiminden vazgeçmenin karda neden olacağı kayıp 8/10 pb dir..

$c_j - z_j$ **satırındaki 2 :** Bir tane daha masa üretirsek karda 2 pb artış olacaktır.

$c_j - z_j$ **satırındaki 0 :** Bir tane daha sandalye üretmenin kara katkısı sıfırdır.

$c_j - z_j$ **satırındaki -8/10 :** Bir saat işgücü kullanmamak, karda -8/10 birimlik artışa yani 8/10 birimlik azalışa sebep olacaktır.

Marangoz hiç masa üretmeyip 11 tane sandalye ürettiğinde karı 88 pb olur ve elinde 80 metre kullanılmayan tahta kalmıştır.

Optimal çözüm tablosu olan son simpleks tabloyu yorumlarsak;

c_j			6	8	0	0
	TD	**TDD**	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$
6	x_1	4	1	0	1/20	-1/10
8	x_2	9	0	1	-1/40	3/20
	$\boldsymbol{z_j}$	96	6	8	1/10	3/5
	$\boldsymbol{c_j - z_j}$	--	0	0	-1/10	-3/5

Optimal çözüm: $x_1 = 4$, $x_2 = 9$, $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, Max Z=96

- **Kazancı daha fazla artırabilir miyiz?**
- **Daha fazla masa ve sandalye üretebilir miyiz?**

DUYARLILIK ANALİZİ

Bir Doğrusal Programlama probleminin optimum çözümünü veren son simpleks tablosu elde edildiğinde, bu tablodaki bilgiler kullanılarak duyarlılık analizleri yapılabilir(Erdem, İ. 2017).

a) Karar değişkenlerinin amaç fonksiyonu katsayılarının değişim aralıklarının belirlenmesi

Son simpleks tablosunda, x_k karar değişkeninin katsayısı olan c_k ‘nın değişim aralığı ne olmalıdır ki optimum çözümde yer alan temel değişkenlerin değerleri değişmesin?

Bu sorunun cevabını vermek için izlenecek adımlar aşağıdaki gibidir:

- Son simpleks tabloda yer alan c_k yerine $c_k + d_k$ konur.
- Bu değişiklik kullanılarak z_j ve $c_j - z_j$ satır vektörleri yeniden oluşturulur.
- Yeniden hesaplanmış olan $c_j - z_j$ satır vektörünün her elemanının; maksimizasyon probleminde "$c_j - z_j \leq 0$ ", minimizasyon probleminde "$c_j - z_j \geq 0$" şartını ortak sağlayan d_k değişim miktarı için bir aralık belirlenir. Bu bulgu yardımıyla da c_k 'nın değişim aralığı bulunur.

Örnek: Örnek 1'de (10. Hafta ders notunda) son tablo aşağıdaki biçimde elde edilmişti.

c_j			500	800	0	0	0
	TD	**TDD**	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	s_3
0	s_1	900/120=15/2	0	0	1	3/4	-23/24
800	x_2	540/120=9/2	0	1	0	1/4	-1/24
500	x_1	36/24=3/2	1	0	0	-1/4	5/24
	$\boldsymbol{z_j}$	4350	500	800	0	75	1700/24
	$\boldsymbol{c_j - z_j}$	--	0	0	0	-75	-1700/24

Burada, x_1 karar değişkeninin $c_1 = 500$ olan amaç fonksiyonu katsayısı için, optimalliği bozmayan bir değişim aralığı belirleyelim.

c_j			$500 + d_1$	800	0	0	0
	TD	**TDD**	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	s_3
0	s_1	900/120	0	0	1	¾	-23/24
800	x_2	540/120	0	1	0	¼	-1/24
$500 + d_1$	x_1	36/24	1	0	0	-1/4	5/24
	$\boldsymbol{z_j}$	4350+(36/24)d_1	$500 + d_1$	800	0	200-(500+d_1)/4	(1700+5d_1)/24
	$\boldsymbol{c_j - z_j}$	--	0	0	0	-200+(500+d_1)/4	-(1700+5d_1)/24

Optimalliğin bozulmaması için $c_j - z_j \leq 0$ şartının sağlanması gerekir. Böylece,

$-200 + (500 + d_1)/4 \leq 0$ ve $-(1700 + 5d_1)/24 \leq 0$

olmalıdır. Bu iki eşitsizlik d_1 için ortak çözülürse;

$d_1 \leq 300$ ve $d_1 \geq -340$ bulunur. ($-340 \leq d_1 \leq 300$)

O zaman; $c_1 = 500 + d_1$ ' den $160 \leq c_1 \leq 800$ bulunur.

b) Kısıtların sağ taraf değerlerinin değişim aralıklarının belirlenmesi

Optimum çözümü veren simpleks tablosunu kullanarak kısıt i-nin sağ taraf değeri b_i'nin değişim aralığı ne olmalıdır ki mevcut temel değişkenler aynı kalsın?

Bu sorunun cevabını vermek için izlenecek adımlar aşağıdaki gibidir:

- Son simpleks tabloda, aylak değişkenlere karşılık gelen matris alınır.
- Orijinal sağ taraf sabitlerinde b_i yerine $b_i + d_i$ konur ve sütun vektörü elde edilir.

(Aylak değişkenlere karşılık gelen matris)x(elde edilen sütun vektörü)

sonucu elde edilir.

- Elde edilen sonuçtaki her bir değerin ≥ 0 şartını sağlaması gerektiği gerçeğinden hareketle d_i değişim miktarı için bir aralık belirlenir.

Bu aralık yardımıyla b_i 'nin değişim aralığı bulunur.

Örnek: (Erdem,İ., 2017).

$Max\ Z$: $3x_1 + 8x_2$

$Kısıtlar$: $0x_1 + 8x_2 \leq 40$

$2x_1 + 4x_2 \leq 32$

$x_1 + 4x_2 \leq 24$

$x_1, x_2 \geq 0$

Yukarıdaki problemin optimal çözümünü veren simpleks tablosu aşağıdadır.

c_j			3	8	0	0	0
	TD	**TDD**	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	s_3
8	x_2	4	0	1	0	-1/4	1/2
0	s_1	8	0	0	1	2	-4
3	x_1	8	1	0	0	1	-1
	$\boldsymbol{z_j}$	56	3	8	0	1	1
	$\boldsymbol{c_j - z_j}$	--	0	0	0	-1	-1

İkinci kısıtın sağ taraf sabiti olan 32 değeri için değişim aralığı ne olmalıdır ki, optimal çözümde temelde yer alan değişkenler aynı kalsın?

Çözüm:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 32 + d_2 \\ 24 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 - \frac{d_2}{4} \\ 8 + 2d_2 \\ 8 + d_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan,

$$4 - \frac{d_2}{4} \geq 0 \ \Rightarrow d_2 \leq 16$$

$$8 + 2d_2 \geq 0 \Rightarrow d_2 \geq -4$$

$$8 + d_2 \geq 0 \Rightarrow d_2 \geq -8$$

olup $-4 \leq d_2 \leq 16$ aralığı elde edilir. Bunu kullanarak ikinci kısıtın sağ taraf sabitinin değişim aralığı;

$b_2 = 32 + d_2 \quad \Rightarrow 28 \leq b_2 \leq 48$ bulunur.

Yani ikinci kısıtın sağ taraf değeri $[28\,,48]$ aralığında hangi değeri alırsa alsın, temeldeki değişkenler aynı kalır.

NOT: (Kaynakların marjinal değerlerinin belirlenmesi)

Optimal çözümü veren son simpleks tablosundaki aylak ve artık değişkenlere karşılık gelen z_j değerleri mevcut kaynakların marjinal değerleridir.(Gölge fiyatlarıdır)

Gölge fiyatlar, bir birim ilave kaynağın eklenmesi ile amaç fonksiyonunda gerçekleşen gelişme ve ilerleme olarak tanımlanır.